PODSTAWY ELEKTRONIKI · ĆWICZENIA

Czwórniki

Opis macierzowy i najważniejsze parametry robocze



Po co opisywać układ jako czwórnik?

Patrzymy z zewnątrz

Inżyniera podłączającego wzmacniacz nie interesują prądy w każdym rezystorze. Chce wiedzieć, jak układ obciąża źródło, ile razy wzmacnia i jak zachowuje się jako źródło dla obciążenia.

Duże układy z bloków

Każdy blok opisujemy macierzą 2×2. Cały układ dostajemy, dodając lub mnożąc macierze, zamiast rozwiązywać od nowa wielki układ równań Kirchhoffa.

Jeden język dla wielu układów

Filtr RC, transformator, linia przesyłowa i tranzystor w punkcie pracy – wszystkie opisujemy tymi samymi czterema liczbami.

Czwórnik liniowy jest w pełni opisany przez cztery liczby. Macierze z, y, h, a to różne zapisy tej samej informacji.

Czwórnik: dwie pary zacisków, cztery wielkości



Liniowy

Elementy R, L, C, transformatory i źródła sterowane. Bez niezależnych źródeł w środku.

Dwie zmienne niezależne

Z czterech wielkości U_1, I_1, U_2, I_2 dwie zadajemy, dwie wynikają z układu.

Oba prądy wpływają

Prąd oddawany do obciążenia jest więc ujemny: $U_2 = -I_2 \cdot ZL$.

Cztery postacie macierzowe – ta sama fizyka

Impedancyjna [z]

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Przyczyną są prądy, elementy mierzymy w stanie jałowym. Układ T, połączenie szeregowe.

Admitancyjna [y]

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Przyczyną są napięcia, elementy mierzymy w stanie zwarcia. Układ Π, połączenie równoległe, FET.

Hybrydowa [h]

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Postać mieszana: h_{11} to impedancja wejściowa, h_{21} wzmocnienie prądowe β tranzystora.

Łańcuchowa [a]

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Wejście wyrażone przez wyjście; minus przy I_2 pozwala mnożyć macierze ogniw kaskady.

Każdy element to pomiar w stanie jałowym lub zwarcia

Stan jałowy

prąd = 0 → rozwieramy wrota

$$z_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0}$$

$$a_{11} = \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_2=0} = \frac{1}{K_{U0}}$$

Stan zwarcia

napięcie = 0 → zwieramy wrota

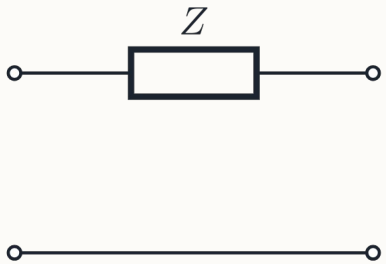
$$h_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{U_2=0}$$

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{U_2=0}$$

Reguła: wyzeruj drugą zmienną z prawej strony tego samego wiersza. **Pułapka:** $y_{11} \neq 1/z_{11}$ – to dwa różne stany układu.

Trzy klocki elementarne

Impedancja podłużna

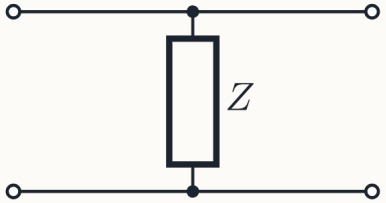


$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Z obwodu: $I_1 = -I_2$, $U_1 = U_2 + Z \cdot I_1$

[z] nie istnieje

Impedancja poprzeczna

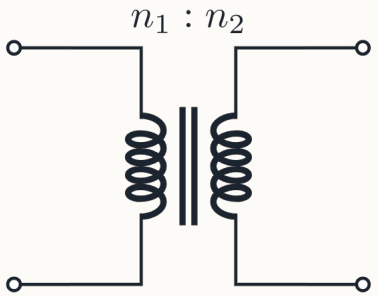


$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z & 1 \end{bmatrix}$$

Z obwodu: $U_1 = U_2$, $I_1 = U_2/Z - I_2$

[y] nie istnieje

Transformator idealny

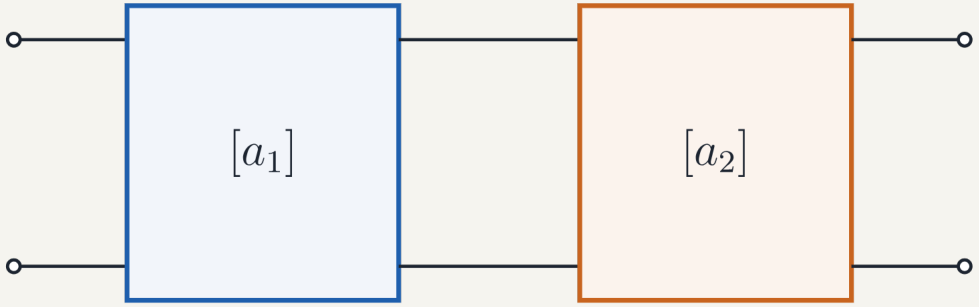


$$[a] = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1/n \end{bmatrix}$$

Z obwodu: $U_1 = n \cdot U_2$, $I_1 = -I_2/n$

$n = n_1/n_2$, obciążenie widać jako $n^2 \cdot Z$

Łączenie czwórników: dodajemy lub mnożymy



Kaskada: $[a] = [a_1] \cdot [a_2]$ – kolejność od wejścia do wyjścia

Szeregowe
wejścia szeregowo i wyjścia szeregowo – wspólne prądy I_1, I_2

$$[z] = [z_1] + [z_2]$$

Równoległe
wejścia równolegle i wyjścia równolegle – wspólne napięcia U_1, U_2

$$[y] = [y_1] + [y_2]$$

Szeregowo-równoległe
wejścia szeregowo, wyjścia równolegle – wspólne I_1 i U_2

$$[h] = [h_1] + [h_2]$$

Kaskadowe
wyjście pierwszego czwórnika dołączone do wejścia drugiego

$$[a] = [a_1] \cdot [a_2]$$

Dodajemy macierz, której zmienne niezależne są wspólne dla obu czwórników. Sumy wymagają warunku regularności; kaskada jest regularna zawsze.

Przeliczanie macierzy i test odwracalności

Od [z] do innych postaci

$$[y] = [z]^{-1}$$

$$[h] = \frac{1}{z_{22}} \begin{bmatrix} \Delta_z & z_{12} \\ -z_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

$$[a] = \frac{1}{z_{21}} \begin{bmatrix} z_{11} & \Delta_z \\ 1 & z_{22} \end{bmatrix}$$

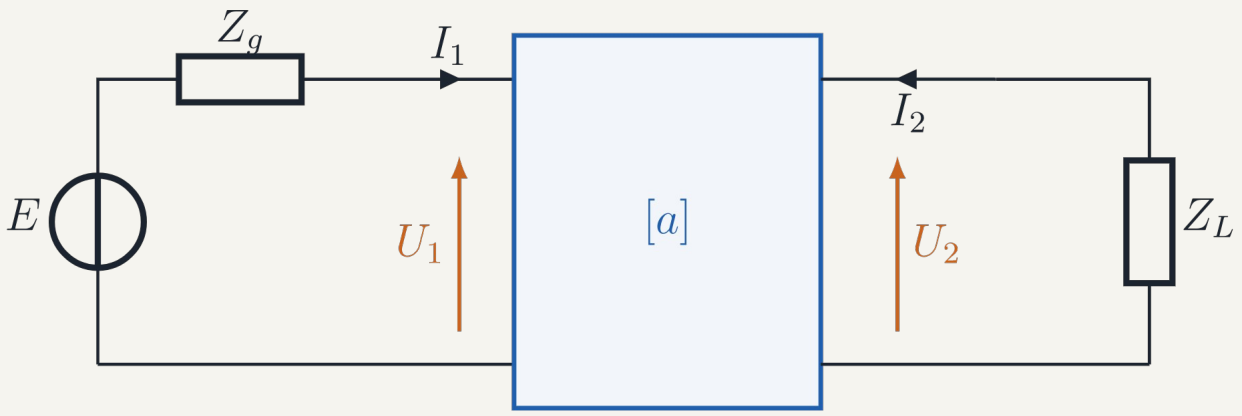
Czwórnik pasywny jest odwracalny

Zamiana źródła i miernika nie zmienia wskazania. Warunek w każdej postaci:

$$z_{12} = z_{21} \;\Leftrightarrow\; y_{12} = y_{21} \;\Leftrightarrow\; h_{12} = -h_{21} \;\Leftrightarrow\; \Delta_a = 1$$

Δa = 1 to najszybszy test rachunków. Symetria: dodatkowo $z_{11} = z_{22}$.

Parametry robocze czwórnika obciążonego



Obciążenie daje $-I_2 = U_2/Z_L$; wzory to proste ilorazy równań łańcuchowych. Impedancję wyjściową liczymy przy wyzerowanym E, ale z Zg na wejściu.

Impedancja wejściowa

$$Z_{\text{we}} = \frac{a_{11} Z_L + a_{12}}{a_{21} Z_L + a_{22}}$$

Wzmocnienie napięciowe

$$K_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_L}{a_{11} Z_L + a_{12}}$$

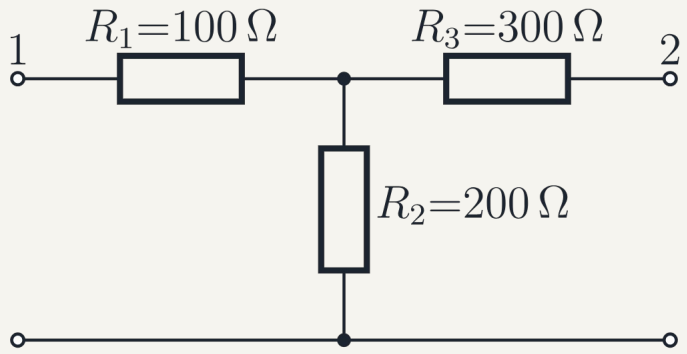
Wzmocnienie prądowe

$$K_I = \frac{I_2}{I_1} = -\frac{1}{a_{21} Z_L + a_{22}}$$

Impedancja wyjściowa

$$Z_{\text{wy}} = \frac{a_{22} Z_g + a_{12}}{a_{21} Z_g + a_{11}}$$

Przykład: rezystancyjny układ T



$$[z] = \begin{bmatrix} 300 & 200 \\ 200 & 500 \end{bmatrix}\ \Omega \qquad [a] = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 550\,\Omega \\ 5\,\mathrm{mS} & 2{,}5 \end{bmatrix}$$

273,3 Ω

rezystancja wejściowa przy obciążeniu 1 kΩ

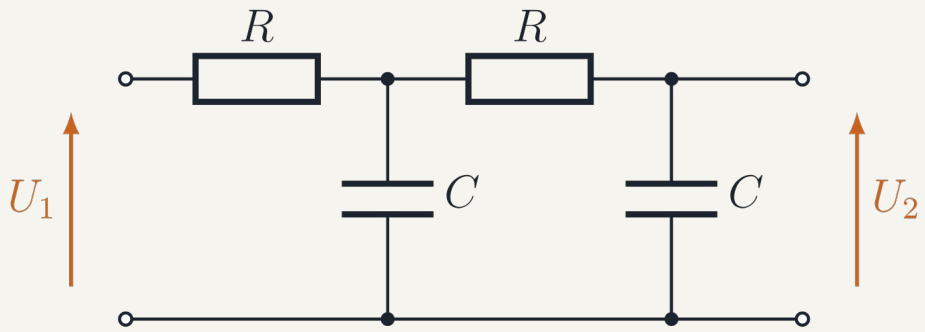
0,488

wzmocnienie napięciowe (−6,2 dB)

385,7 Ω

rezystancja wyjściowa przy źródle 50 Ω

Kaskada RC: macierze, nie iloczyn wzmocnień



$$K_1 = \frac{1}{1 + jx}$$

$$K_2 = \frac{1}{1 - x^2 + 3jx}$$

x = ωRC; R = 1 kΩ, C = 100 nF, f = 1 kHz

0,847

jedno ogniwo, $|K_1|$

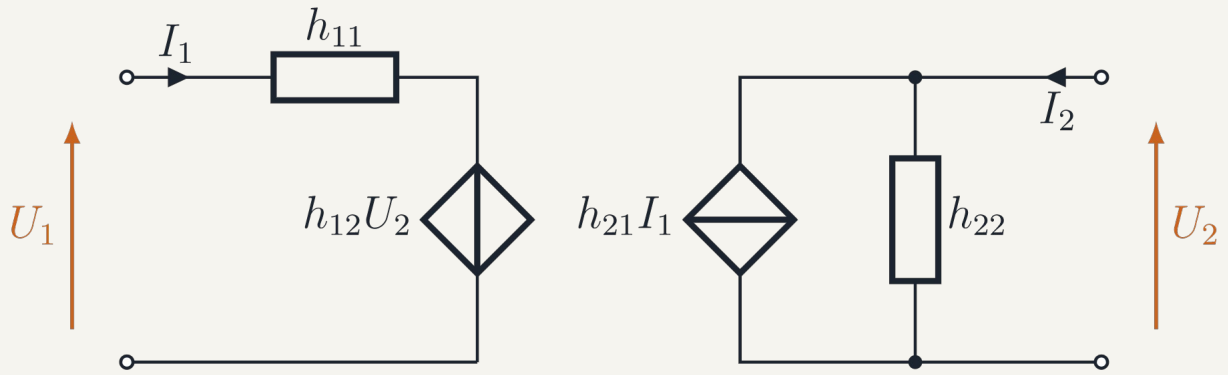
0,505

kaskada z macierzy [a], $|K_2|$ – poprawnie

0,717

$|K_1|^2$ – błędnie, pomija obciążanie

Tranzystor: model hybrydowy [h]



$$K_U = \frac{-h_{21}R_L}{h_{11} + \Delta_h R_L}$$

h_{11} = 2 kΩ, h_{12} = 2,5·10⁻⁴, h_{21} = 150, h_{22} = 20 µS; obciążenie 4 kΩ, źródło 1 kΩ

−298,5

wzmocnienie napięciowe (odwrócenie fazy)

1861 Ω

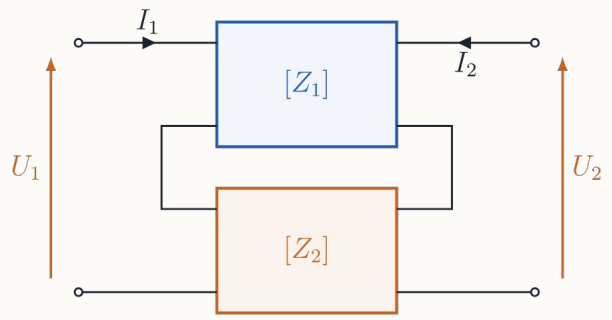
rezystancja wejściowa

133,3 kΩ

rezystancja wyjściowa (1/h_{22} dałoby 50 kΩ)

ZADANIE 11 · CZĘŚĆ 1

Połączenie szeregowe: [Z] = [Z₁] + [Z₂]



Wejścia połączone szeregowo i wyjścia połączone szeregowo.

Warunek regularności: każdy czwórnik musi nadal spełniać warunek wrót; sprawdzamy testem Brune'a albo wstawiamy transformator 1:1.

1 Prądy: przez oba czwórniki płynie ten sam prąd

$$I_1' = I_1'' = I_1, \qquad I_2' = I_2'' = I_2$$

2 Napięcia: z prawa napięciowego Kirchhoffa sumują się

$$U_1 = U_1' + U_1'', \qquad U_2 = U_2' + U_2''$$

3 Równania obu czwórników – ten sam wektor prądów

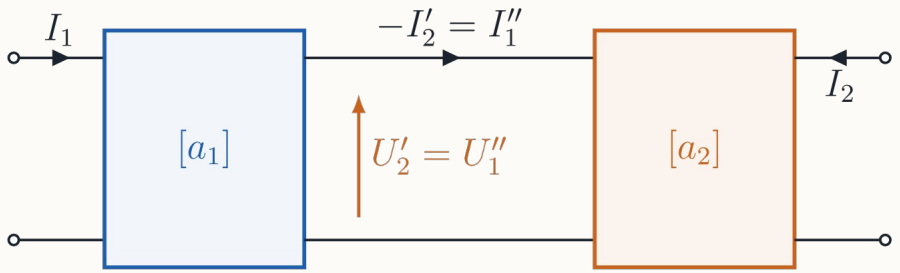
$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \end{bmatrix} = [Z_1] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} U_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix} = [Z_2] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

4 Sumujemy stronami i porównujemy z definicją [Z]

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \left([Z_1] + [Z_2]\right) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \implies [Z] = [Z_1] + [Z_2]$$

ZADANIE 11 · CZĘŚĆ 2

Kaskada: [a] = [a₁] · [a₂]



1 Równanie pierwszego czwórnika

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [a_1] \begin{bmatrix} U_2' \\ -I_2' \end{bmatrix}$$

2 Wyjście pierwszego to wejście drugiego

$$U_2' = U_1'', \quad -I_2' = I_1'' \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} U_2' \\ -I_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1'' \\ I_1'' \end{bmatrix}$$

3 Równanie drugiego czwórnika

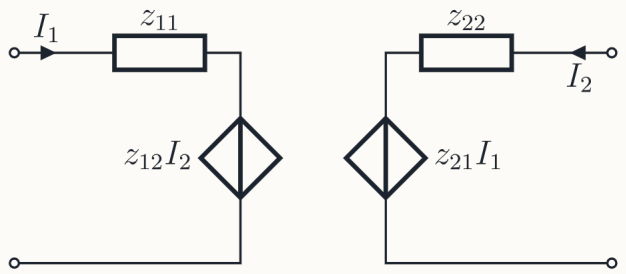
$$\begin{bmatrix} U_1'' \\ I_1'' \end{bmatrix} = [a_2] \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

4 Podstawiamy krok 3 do kroku 1

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [a_1][a_2] \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; [a] = [a_1] \cdot [a_2]$$

ZADANIE 12 · CZĘŚĆ 1

Schemat zastępczy macierzy [z]



Źródła napięciowe sterowane prądem. Wrota nie mają wspólnego węzła – łączą je tylko źródła sterowane.

1. Oczko wejściowe: spadek na z_{11} plus napięcie źródła $z_{12}I_2$

$$U_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$$

2. Oczko wyjściowe: spadek na z_{22} plus napięcie źródła $z_{21}I_1$

$$U_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$$

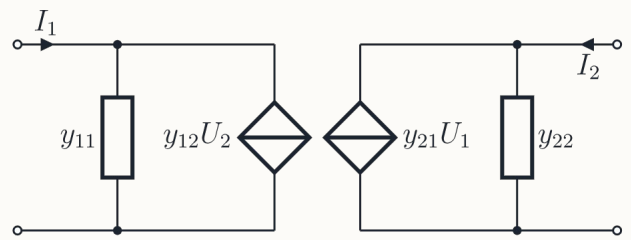
3. Porównanie z definicją – to dokładnie równania [z]

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Schemat zachowuje się na zaciskach jak czwórnik, więc jest jego poprawnym modelem.

ZADANIE 12 · CZĘŚĆ 2

Schemat zastępczy macierzy [y]



Źródła prądowe sterowane napięciem. y_{11} i y_{22} to admitancje (impedancje $1/y_{11}$, $1/y_{22}$).

1 Węzeł wejściowy: prąd admitancji $y_{11}U_1$ plus prąd źródła

$$I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2$$

2 Węzeł wyjściowy: analogicznie

$$I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2$$

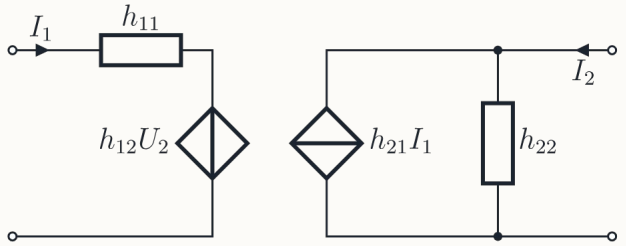
3 Porównanie z definicją [y]

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Admitancja leży bezpośrednio na napięciu wrót, dlatego jej prąd to y·U.

ZADANIE 12 · CZĘŚĆ 3

Schemat zastępczy macierzy [h]



Oczko na wejściu, węzeł na wyjściu. To podstawowy model małosygnałowy tranzystora bipolarnego.

1. Wejście (oczko): h_{11} szeregowo ze źródłem napięciowym

$$U_1 = h_{11}I_1 + h_{12}U_2$$

2. Wyjście (węzeł): źródło prądowe równolegle z admitancją h_{22}

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}U_2$$

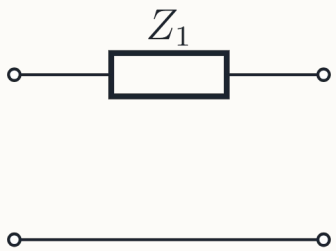
3. Porównanie z definicją [h]

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

h_{11} – impedancja wejściowa przy zwartym wyjściu; h_{12} – oddziaływanie zwrotne; $h_{21} = \beta$; h_{22} – admitancja wyjściowa.

ZADANIE 13 · A · 1/2

a) Impedancja podłużna: równania, [z] i [y]



Z_1 łączy górne zaciski 1 i 2, dolny przewód jest wspólny. Prąd wpływający jednym górnym zaciskiem wypływa drugim.

1 Równania Kirchhoffa

$$I_1 = -I_2, \qquad U_1 = Z_1 I_1 + U_2$$

2 Czy istnieje [z]? Sprawdzamy stan jałowy wyjścia

$$I_2 = 0 \;\Rightarrow\; I_1 = 0, \qquad U_1 = U_2 \text{ dowolne}$$

Prądów nie da się zadać niezależnie, więc napięć nie wyrazimy przez I_1 i I_2 – macierz [z] nie istnieje.

3 Wyrażamy prądy przez napięcia

$$I_1 = \frac{U_1 - U_2}{Z_1} = \frac{1}{Z_1}U_1 - \frac{1}{Z_1}U_2, \qquad I_2 = -I_1 = -\frac{1}{Z_1}U_1 + \frac{1}{Z_1}U_2$$

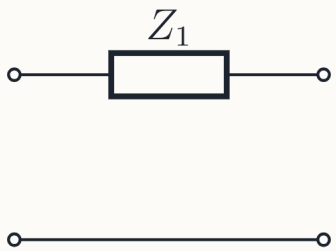
4 Macierz [y] i jej wyznacznik

$$[y] = \frac{1}{Z_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \Delta_y = \frac{1}{Z_1^2} - \frac{1}{Z_1^2} = 0$$

$\Delta y = 0$ potwierdza, że $[z] = [y]^{-1}$ nie istnieje.

ZADANIE 13 · A · 2/2

a) Impedancja podłużna: [h] i [a]



Współczynniki odczytujemy wprost z równań $I_1 = -I_2$ i $U_1 = Z_1 I_1 + U_2$, przepisanych w kolejności zmiennych danej postaci.

1 Postać h: zmienne niezależne I_1 i U_2

$$U_1 = Z_1 \cdot I_1 + 1 \cdot U_2, \qquad I_2 = -1 \cdot I_1 + 0 \cdot U_2$$

2 Macierz [h] i test odwracalności

$$[h] = \begin{bmatrix} Z_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad h_{12} = 1 = -h_{21} \ \checkmark$$

3 Postać a: zmienne niezależne U_2 i $-I_2$

$$U_1 = 1 \cdot U_2 + Z_1(-I_2), \qquad I_1 = 0 \cdot U_2 + 1 \cdot (-I_2)$$

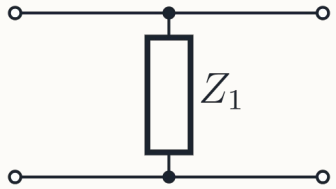
4 Macierz [a] i test $\Delta a = 1$

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \Delta_a = 1 \cdot 1 - Z_1 \cdot 0 = 1 \ \checkmark$$

To jest klocek „impedancja podłużna” używany w kaskadach.

ZADANIE 13 · B · 1/2

b) Impedancja poprzeczna: równania i [z]



Z_1 łączy górny i dolny przewód. Oba prądy wpływają do węzła i płyną przez Z_1.

1 Równania Kirchhoffa

$$U_1 = U_2 = Z_1(I_1 + I_2)$$

2 Rozpisujemy na dwa równania postaci z

$$U_1 = Z_1 I_1 + Z_1 I_2, \qquad U_2 = Z_1 I_1 + Z_1 I_2$$

3 Macierz [z] i jej wyznacznik

$$[z] = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_1 \\ Z_1 & Z_1 \end{bmatrix}, \qquad \Delta_z = Z_1^2 - Z_1^2 = 0$$

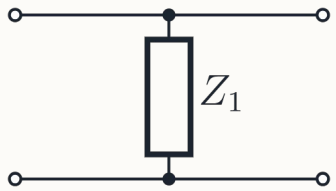
4 Czy istnieje [y]? Sprawdzamy zwarcie wyjścia

$$U_2 = 0 \;\Rightarrow\; U_1 = 0 \;\; \text{przy dowolnym } I_1$$

$U_1 \equiv U_2$, więc napięć nie można zadać niezależnie – [y] nie istnieje ($\Delta z = 0$).

ZADANIE 13 · B · 2/2

b) Impedancja poprzeczna: [h] i [a]



Interpretacja: $h_{11} = 0$, bo zwarcie wyjścia zwiera też wejście; $h_{21} = -1$, bo przy zwartym wyjściu cały prąd I_1 wypływa zaciskiem 2.

1 Postać h: wyrażamy U_1 i I_2 przez I_1 i U_2

$$U_1 = 0 \cdot I_1 + 1 \cdot U_2, \qquad U_2 = Z_1(I_1 + I_2) \Rightarrow I_2 = -I_1 + \frac{1}{Z_1}U_2$$

2 Macierz [h]

$$[h] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{Z_1} \end{bmatrix}, \qquad h_{12} = 1 = -h_{21} \checkmark$$

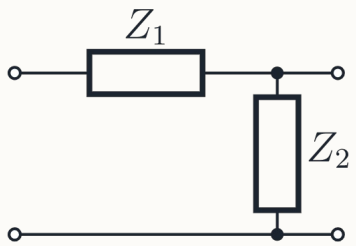
3 Postać a: prąd wejściowy dzieli się na prąd Z_1 i prąd wyjścia

$$U_1 = U_2, \qquad I_1 = \frac{1}{Z_1}U_2 + (-I_2)$$

4 Macierz [a] – klocek „impedancja poprzeczna”

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_1} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \Delta_a = 1 \checkmark$$

c) Czwórnik Γ: równania i macierz [z]



Z_1 podłużnie, Z_2 poprzecznie przy wyjściu – zwykły dzielnik napięcia.

1 Przez Z_2 płynie suma prądów $I_1 + I_2$

$$U_2 = Z_2(I_1 + I_2)$$

2 Oczko wejściowe: spadek na Z_1 plus napięcie U_2

$$U_1 = Z_1 I_1 + U_2 = (Z_1 + Z_2) I_1 + Z_2 I_2$$

3 Macierz [z] odczytujemy wprost; wyznacznik

$$[z] = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 \end{bmatrix}, \qquad \Delta_z = (Z_1 + Z_2) Z_2 - Z_2^2 = Z_1 Z_2$$

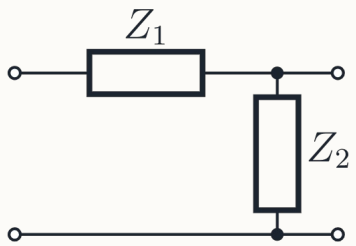
4 Sprawdzenie z definicji (stan jałowy wyjścia)

$$z_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = Z_1 + Z_2, \qquad z_{21} = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = Z_2 \ \checkmark$$

Przy rozwartym wyjściu z wejścia widać $Z_1 + Z_2$, a na wyjściu jest napięcie z Z_2.

ZADANIE 13 · C · 2/3

c) Czwórnik Γ: macierz [y] = [z]⁻¹



Odwracamy macierz 2×2: zamiana elementów przekątnej, zmiana znaku pozostałych, dzielenie przez wyznacznik.

1 Wzór na macierz odwrotną

$$[y] = \frac{1}{\Delta_z}\begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}$$

2 Podstawiamy elementy [z] i $\Delta z = Z_1 Z_2$

$$[y] = \frac{1}{Z_1 Z_2}\begin{bmatrix} Z_2 & -Z_2 \\ -Z_2 & Z_1 + Z_2 \end{bmatrix}$$

3 Skracamy każdy element

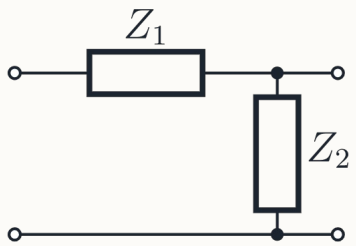
$$[y] = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} & -\frac{1}{Z_1} \\ -\frac{1}{Z_1} & \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \end{bmatrix}$$

4 Sprawdzenie z definicji: zwarte wyjście zwiera Z_2

$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{U_2=0} = \frac{1}{Z_1} \checkmark$$

ZADANIE 13 · C · 3/3

c) Czwórnik Γ: [h], [a] i transmitancja



Dla $Z_1 = R_1$ i $Z_2 = R_3$ to wynik z wykładu.

1 Macierz [h] wprost z równań

$$U_1 = Z_1 I_1 + U_2, \qquad I_2 = -I_1 + \frac{U_2}{Z_2} \Rightarrow [h] = \begin{bmatrix} Z_1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{Z_2} \end{bmatrix}$$

2 [a] jako iloczyn: najpierw Z_1 podłużnie, potem Z_2 poprzecznie

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix}$$

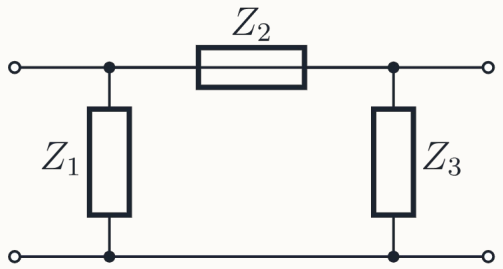
3 Test odwracalności

$$\Delta_a = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \cdot 1 - Z_1 \cdot \frac{1}{Z_2} = 1 \checkmark$$

4 Transmitancja w stanie jałowym – znany dzielnik napięcia

$$K_{U0} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

d) Czwórnik Π: równania węzłowe i [y]



Oznaczenia: $Y_k = 1/Z_k$, $\Sigma = Z_1 + Z_2 + Z_3$. Dla układu Π najprostsza jest macierz [y].

1 Węzeł wejściowy: prąd przez Z_1 do masy i przez Z_2 do wyjścia

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_1} + \frac{U_1 - U_2}{Z_2} = (Y_1 + Y_2)\,U_1 - Y_2\,U_2$$

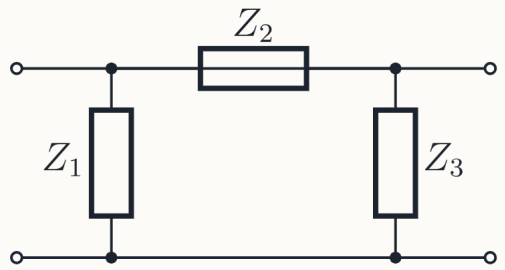
2 Węzeł wyjściowy: prąd przez Z_3 i przez Z_2

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_3} + \frac{U_2 - U_1}{Z_2} = -Y_2\,U_1 + (Y_2 + Y_3)\,U_2$$

3 Macierz [y] odczytana ze współczynników

$$[y] = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix}, \qquad y_{12} = y_{21}\ \checkmark$$

d) Czwórnik Π: macierz [z] z definicji



Stan jałowy wyjścia: $I_2 = 0$. Prąd I_1 płynie do równoległego połączenia $Z_1 \parallel (Z_2 + Z_3)$.

1 Impedancja wejściowa przy rozwartym wyjściu

$$z_{11} = Z_1 \parallel (Z_2 + Z_3) = \frac{Z_1(Z_2 + Z_3)}{\Sigma}$$

2 Napięcie wyjściowe z dzielnika Z_2–Z_3

$$U_2 = U_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{Z_1(Z_2 + Z_3)}{\Sigma} I_1 \cdot \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} \Rightarrow z_{21} = \frac{Z_1 Z_3}{\Sigma}$$

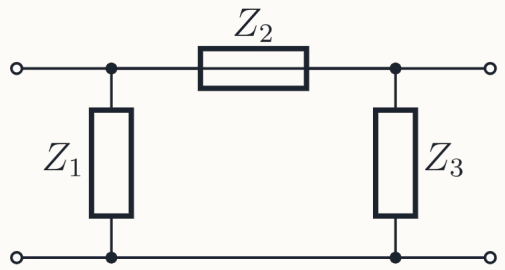
3 Symetria układu: zamiana ról wejścia i wyjścia

$$Z_1 \leftrightarrow Z_3 : \qquad z_{22} = \frac{Z_3(Z_1 + Z_2)}{\Sigma}, \qquad z_{12} = \frac{Z_1 Z_3}{\Sigma} = z_{21}$$

4 Wynik

$$[z] = \frac{1}{\Sigma} \begin{bmatrix} Z_1(Z_2 + Z_3) & Z_1 Z_3 \\ Z_1 Z_3 & Z_3(Z_1 + Z_2) \end{bmatrix}$$

d) Czwórnik Π: macierz [h] z definicji



h_{11} i h_{21}: wyjście zwarte (Z_3 zwarta). h_{12} i h_{22}: wejście rozwarte.

1 h_{11}: z wejścia widać Z_1 równolegle z Z_2

$$h_{11} = Z_1 \parallel Z_2 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

2 h_{12}: napięcie U_2 dzielą Z_2 i Z_1

$$h_{12} = \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_1=0} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

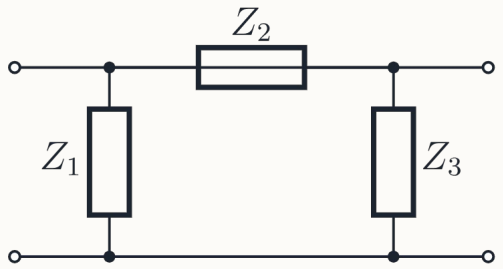
3 h_{21}: prąd przez Z_2 wypływa zaciskiem 2

$$I_{Z_2} = I_1 \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}, \qquad I_2 = -I_{Z_2} \;\Rightarrow\; h_{21} = -\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

4 h_{22}: z wyjścia widać $Z_3 \parallel (Z_1 + Z_2)$

$$h_{22} = \frac{1}{Z_3 \parallel (Z_1 + Z_2)} = \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_1 + Z_2}, \qquad h_{12} = -h_{21}\ \checkmark$$

d) Czwórnik Π: [a] jako kaskada trzech klocków



Kolejność od wejścia: poprzeczna Z_1, podłużna Z_2, poprzeczna Z_3.

1 Iloczyn trzech macierzy elementarnych

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

2 Mnożymy po kolei – najpierw dwie pierwsze

$$\begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ Y_1 & 1+Z_2Y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+Z_2Y_3 & Z_2 \\ Y_1+Y_3+Z_2Y_1Y_3 & 1+Z_2Y_1 \end{bmatrix}$$

3 Wynik w impedancjach i sprawdzenie $a_{11} = z_{11}/z_{21}$

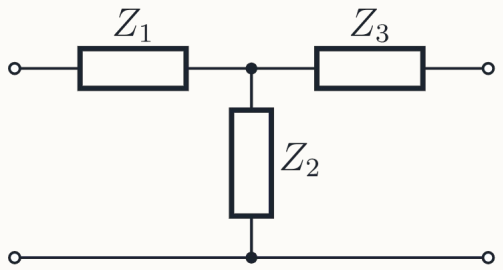
$$[a] = \begin{bmatrix} 1+\frac{Z_2}{Z_3} & Z_2 \\ \frac{\Sigma}{Z_1 Z_3} & 1+\frac{Z_2}{Z_1} \end{bmatrix}, \qquad a_{11} = \frac{z_{11}}{z_{21}} = \frac{Z_2+Z_3}{Z_3} \checkmark$$

4 Wyznacznik [a]

$$\Delta_a = \frac{(Z_3+Z_2)(Z_1+Z_2) - Z_2(Z_1+Z_2+Z_3)}{Z_1 Z_3} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 Z_3} = 1 \checkmark$$

ZADANIE 13 · E · 1/3

e) Czwórnik T: równania oczkowe, [z] i [y]



Oznaczenie: P = $Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3$. Dla układu T najprostsza jest macierz [z].

1 Oczko wejściowe: przez Z_2 płynie $I_1 + I_2$

$$U_1 = Z_1 I_1 + Z_2(I_1 + I_2) = (Z_1 + Z_2)\, I_1 + Z_2\, I_2$$

2 Oczko wyjściowe

$$U_2 = Z_3 I_2 + Z_2(I_1 + I_2) = Z_2\, I_1 + (Z_2 + Z_3)\, I_2$$

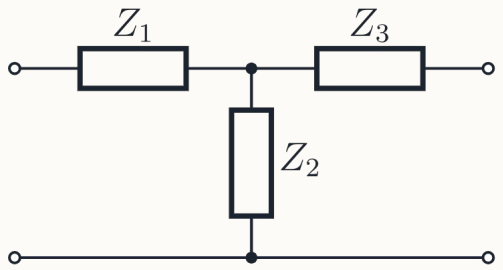
3 Macierz [z] i jej wyznacznik

$$[z] = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}, \qquad \Delta_z = (Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) - Z_2^2 = P$$

4 Macierz [y] = $[z]^{-1}$

$$[y] = [z]^{-1} = \frac{1}{P} \begin{bmatrix} Z_2 + Z_3 & -Z_2 \\ -Z_2 & Z_1 + Z_2 \end{bmatrix}$$

e) Czwórnik T: macierz [h] i sprawdzenie



Korzystamy ze wzorów przeliczeniowych z zadania 14 (z → h), a potem sprawdzamy dwa elementy z definicji.

1 h_{11} i h_{12} ze wzorów przeliczeniowych

$$h_{11} = \frac{\Delta_z}{z_{22}} = \frac{P}{Z_2 + Z_3}, \qquad h_{12} = \frac{z_{12}}{z_{22}} = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3}$$

2 h_{21} i h_{22}

$$h_{21} = -\frac{z_{21}}{z_{22}} = -\frac{Z_2}{Z_2 + Z_3}, \qquad h_{22} = \frac{1}{z_{22}} = \frac{1}{Z_2 + Z_3}$$

3 Sprawdzenie h_{11}: zwarte wyjście, Z_3 równolegle z Z_2

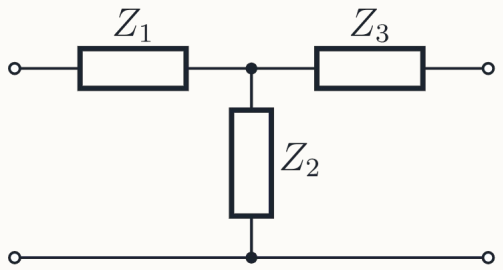
$$h_{11}: \quad Z_1 + Z_2 \parallel Z_3 = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{P}{Z_2 + Z_3} \checkmark$$

4 Sprawdzenie h_{22}: wejście rozwarte

$$h_{22}: \quad Z_3 + Z_2 \Rightarrow h_{22} = \frac{1}{Z_2 + Z_3} \checkmark$$

ZADANIE 13 · E · 3/3

e) Czwórnik T: [a] jako kaskada



Kolejność od wejścia: podłużna Z_1, poprzeczna Z_2, podłużna Z_3.

1 Dwa pierwsze klocki (to ogniwo Γ z punktu c)

$$\begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix}$$

2 Mnożymy przez klocek podłużny Z_3

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\frac{Z_1}{Z_2} & \frac{P}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} & 1+\frac{Z_3}{Z_2} \end{bmatrix}$$

3 Element a_{12} – sprowadzenie do wspólnego mianownika

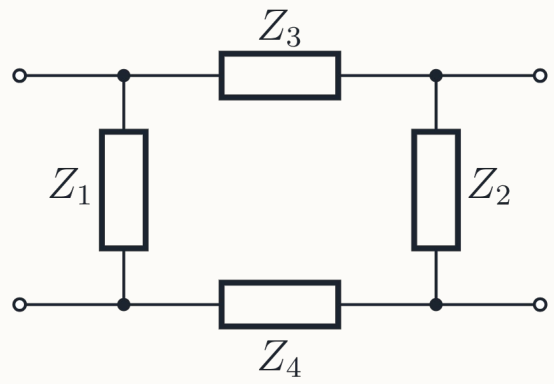
$$a_{12} = Z_3\left(1+\frac{Z_1}{Z_2}\right) + Z_1 = \frac{Z_2Z_3 + Z_1Z_3 + Z_1Z_2}{Z_2} = \frac{P}{Z_2}$$

4 Kontrola: a_{21} i wyznacznik

$$a_{21} = \frac{1}{z_{21}} = \frac{1}{Z_2}\ \checkmark, \qquad \Delta_a = \frac{(Z_1+Z_2)(Z_2+Z_3) - P}{Z_2^2} = 1\ \checkmark$$

ZADANIE 13 · F · 1/2

f) Π symetryczny: prądy w gałęziach podłużnych



Węzły A, C to wejście, B, D to wyjście. Gałęzie podłużne: Z_3 (górna) i Z_4 (dolna).

1 Prądowe prawo Kirchhoffa w węźle A

$$I_{Z_3}^{(A\to B)} = I_1 - I_{Z_1}$$

2 W węźle C – ten sam prąd w Z_4

$$I_{Z_4}^{(D\to C)} = I_1 - I_{Z_1} \;\Rightarrow\; I_{Z_3} = I_{Z_4} \equiv I_s$$

3 Oczko A–B–D–C–A

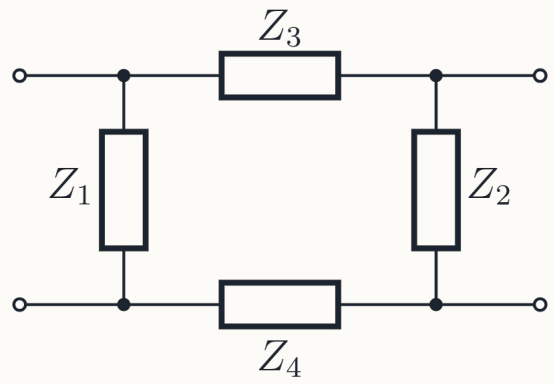
$$Z_3 I_s + U_2 + Z_4 I_s - U_1 = 0 \;\Rightarrow\; I_s = \frac{U_1 - U_2}{Z_3 + Z_4}$$

4 Wniosek: od strony wrót to Π z jedną impedancją podłużną

$$Z_s = Z_3 + Z_4, \qquad \Sigma = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4$$

ZADANIE 13 · F · 2/2

f) Π symetryczny: macierze



Taki układ (zrównoważony) stosuje się w liniach symetrycznych. Różnica wobec zwykłego Π ujawnia się dopiero przy łączeniu z innymi układami – masa wejścia i wyjścia nie jest wspólna.

1 Równania węzłowe z $Z_s = Z_3 + Z_4$

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_1} + \frac{U_1 - U_2}{Z_s}, \qquad I_2 = \frac{U_2}{Z_2} + \frac{U_2 - U_1}{Z_s}$$

2 Macierz [y]

$$[y] = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_s} & -\frac{1}{Z_s} \\ -\frac{1}{Z_s} & \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_s} \end{bmatrix}$$

3 [z] z wyników 13d ($Z_2 \to Z_3 + Z_4$, $Z_3 \to Z_2$) i sprawdzenie

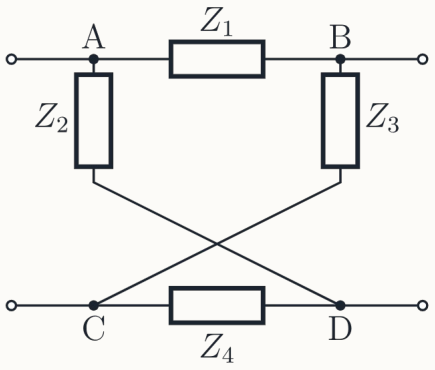
$$[z] = \frac{1}{\Sigma} \begin{bmatrix} Z_1(Z_2 + Z_3 + Z_4) & Z_1 Z_2 \\ Z_1 Z_2 & Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4) \end{bmatrix}, \qquad z_{11} = Z_1 \parallel (Z_3 + Z_2 + Z_4) \checkmark$$

4 [a] i [h] tym samym podstawieniem

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_s}{Z_2} & Z_s \\ \frac{\Sigma}{Z_1 Z_2} & 1 + \frac{Z_s}{Z_1} \end{bmatrix}, \qquad [h] = \begin{bmatrix} \frac{Z_1 Z_s}{Z_1 + Z_s} & \frac{Z_1}{Z_1 + Z_s} \\ -\frac{Z_1}{Z_1 + Z_s} & \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_1 + Z_s} \end{bmatrix}$$

ZADANIE 13 · G · 1/3

g) Mostek: oznaczenia, z_{11} i z_{21}



Z_1: A–B, Z_2: A–D, Z_3: B–C, Z_4: C–D. Wejście A–C i wyjście B–D to przekątne mostka. Wyjście rozwarte: $I_2 = 0$.

1 Oznaczenia pomocnicze

$$\Sigma = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4, \qquad K = Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4$$

T = $Z_1Z_2Z_3 + Z_1Z_2Z_4 + Z_1Z_3Z_4 + Z_2Z_3Z_4$ (pojawi się w wyznaczniku)

2 z_{11}: dwie równoległe drogi A–B–C i A–D–C

$$z_{11} = (Z_1 + Z_3) \parallel (Z_2 + Z_4) = \frac{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4)}{\Sigma}$$

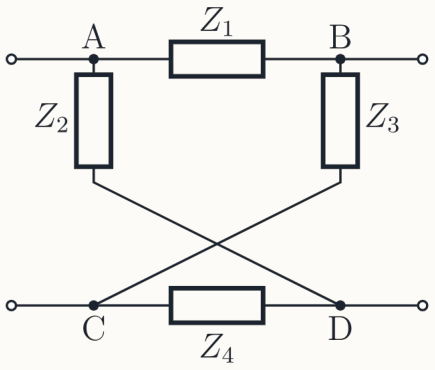
3 Podział prądu I_1 między drogi

$$I_{ABC} = I_1 \frac{Z_2 + Z_4}{\Sigma}, \qquad I_{ADC} = I_1 \frac{Z_1 + Z_3}{\Sigma}$$

4 Potencjał C równy zeru; U_2 to różnica potencjałów B i D

$$V_C = 0: \quad U_2 = V_B - V_D = Z_3 I_{ABC} - Z_4 I_{ADC} = \frac{Z_3(Z_2 + Z_4) - Z_4(Z_1 + Z_3)}{\Sigma} I_1 = \frac{K}{\Sigma} I_1$$

g) Mostek: z_{22}, z_{12} i wyznacznik



Wejście rozwarte: $I_1 = 0$. Między B i D są drogi B–A–D i B–C–D. Przyjmujemy potencjał D równy zeru.

1 z_{22}: dwie równoległe drogi

$$z_{22} = (Z_1 + Z_2) \parallel (Z_3 + Z_4) = \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)}{\Sigma}$$

2 z_{12} z podziału prądu I_2 – wychodzi równe z_{21}

$$I_{BAD} = I_2 \frac{Z_3 + Z_4}{\Sigma}, \quad I_{BCD} = I_2 \frac{Z_1 + Z_2}{\Sigma}, \quad U_1 = Z_2 I_{BAD} - Z_4 I_{BCD} \Rightarrow z_{12} = \frac{K}{\Sigma}$$

3 Pełna macierz [z]

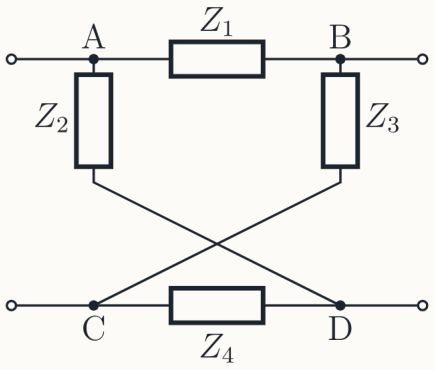
$$[z] = \frac{1}{\Sigma} \begin{bmatrix} (Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4) & K \\ K & (Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4) \end{bmatrix}$$

4 Wyznacznik i szybki test dla równych impedancji

$$\Delta_z = \frac{T}{\Sigma}; \qquad Z_k = Z: \ \frac{16Z^4 - 0}{16Z^2} = Z^2 = \frac{4Z^3}{4Z} \ \checkmark$$

ZADANIE 13 · G · 3/3

g) Mostek: [y], [h], [a] i mostek zrównoważony



Gdy K = 0, czyli $Z_2Z_3 = Z_1Z_4$, mostek jest zrównoważony (zasada mostka Wheatstone'a): napięcie wyjściowe nie zależy od wejściowego.

1 Macierz [y] = $[z]^{-1}$

$$[y] = \frac{1}{T}\begin{bmatrix}(Z_1+Z_2)(Z_3+Z_4) & -K \\ -K & (Z_1+Z_3)(Z_2+Z_4)\end{bmatrix}$$

2 To samo w admitancjach – zapis szczególnie czytelny

$$y_{11} = \frac{(Y_1+Y_2)(Y_3+Y_4)}{Y_\Sigma}, \quad y_{12} = \frac{Y_2Y_3 - Y_1Y_4}{Y_\Sigma}, \quad y_{22} = \frac{(Y_1+Y_3)(Y_2+Y_4)}{Y_\Sigma}$$

3 Macierze [h] i [a] ze wzorów przeliczeniowych

$$[h] = \frac{1}{(Z_1+Z_2)(Z_3+Z_4)}\begin{bmatrix}T & K \\ -K & \Sigma\end{bmatrix}, \qquad [a] = \frac{1}{K}\begin{bmatrix}(Z_1+Z_3)(Z_2+Z_4) & T \\ \Sigma & (Z_1+Z_2)(Z_3+Z_4)\end{bmatrix}$$

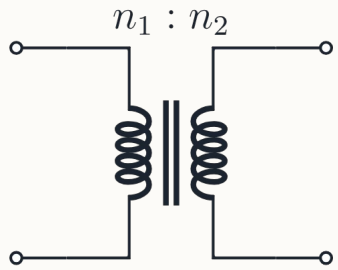
4 Mostek zrównoważony i przypadek graniczny

$$K = 0 \;\Rightarrow\; z_{21} = 0; \qquad Z_2, Z_3 \to \infty : \;\; y_{11} \to \frac{1}{Z_1+Z_4}\ \checkmark$$

Dla K = 0 macierz [a] nie istnieje (dzielenie przez K), choć [z], [y] i [h] istnieją.

ZADANIE 13 · H · 1/2

h) Transformator idealny: równania i [h]



Założenia: brak strat, nieskończona indukcyjność uzwojeń (zerowy prąd magnesujący), pełne sprzężenie. Uzwojenia nawinięte zgodnie.

1 Napięcia: ten sam strumień przenika oba uzwojenia

$$\frac{U_1}{n_1} = \frac{U_2}{n_2} \;\Rightarrow\; U_1 = n\,U_2, \qquad n = \frac{n_1}{n_2}$$

2 Prądy: wypadkowy przepływ w rdzeniu jest zerowy

$$n_1 I_1 + n_2 I_2 = 0 \;\Rightarrow\; I_2 = -n\,I_1, \qquad U_1 I_1 + U_2 I_2 = 0$$

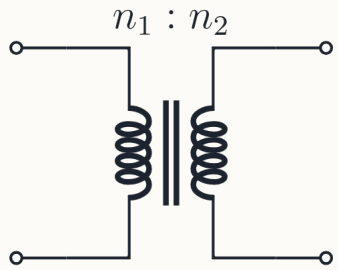
Transformator idealny nie pobiera mocy.

3 Postać h – współczynniki wprost z równań

$$U_1 = 0 \cdot I_1 + n\,U_2, \qquad I_2 = -n\,I_1 + 0 \cdot U_2 \;\Rightarrow\; [h] = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix}$$

ZADANIE 13 · H · 2/2

h) Transformator idealny: [a] i dopasowanie



Przy przeciwnym nawinięciu uzwojeń wystarczy zamienić n → −n.

1 Postać łańcuchowa

$$U_1 = n\,U_2 + 0\cdot(-I_2), \qquad I_1 = 0\cdot U_2 + \frac{1}{n}(-I_2) \;\Rightarrow\; [a] = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

2 Testy odwracalności

$$\Delta_a = n\cdot\frac{1}{n} = 1\ \checkmark, \qquad h_{12} = n = -h_{21}\ \checkmark$$

3 Dlaczego [z] i [y] nie istnieją

$$[z] = \frac{1}{h_{22}}(\ldots),\ \ h_{22} = 0; \qquad [y] = \frac{1}{h_{11}}(\ldots),\ \ h_{11} = 0$$

Przy $I_2 = 0$ musi być $I_1 = 0$, a przy $U_2 = 0$ jest $U_1 = 0$ – ani prądy, ani napięcia nie są niezależne.

4 Impedancja wejściowa – podstawa dopasowania impedancji

$$Z_{\text{we}} = \frac{a_{11}Z_L + a_{12}}{a_{21}Z_L + a_{22}} = \frac{n\,Z_L}{1/n} = n^2 Z_L$$

ZADANIE 13 · PODSUMOWANIE

Zestawienie wyników zadania 13

	$[z]$	$[y]$	$[h]$	$[a]$
a)	—	$\frac{1}{Z_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
b)	$\begin{bmatrix} Z_1 & Z_1 \\ Z_1 & Z_1 \end{bmatrix}$	—	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{Z_1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_1} & 1 \end{bmatrix}$
c)	$\begin{bmatrix} Z_1+Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} & -\frac{1}{Z_1} \\ -\frac{1}{Z_1} & \frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z_1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{Z_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1+\frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix}$

	$[z]$	$[y]$	$[h]$	$[a]$
e)	$\begin{bmatrix} Z_1+Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2+Z_3 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{P}\begin{bmatrix} Z_2+Z_3 & -Z_2 \\ -Z_2 & Z_1+Z_2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Z_2+Z_3}\begin{bmatrix} P & Z_2 \\ -Z_2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1+\frac{Z_1}{Z_2} & \frac{P}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} & 1+\frac{Z_3}{Z_2} \end{bmatrix}$
h)	—	—	$\begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$

Wyniki dla d), f) i g) – na slajdach tych układów. Kreska: dana macierz nie istnieje. Wszystkie czwórniki a)–g) są odwracalne: $\Delta a = 1$.

ZADANIE 14 · CZĘŚĆ 1

Związki między macierzami: z ↔ h

Metoda

Z równań jednej postaci wyliczamy wielkości, które w drugiej postaci stoją po lewej stronie.

$$U_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad (1), \qquad U_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \quad (2)$$

W postaci h zmiennymi niezależnymi są I_1 i U_2.

1 Z równania (2) wyznaczamy I_2

$$I_2 = -\frac{z_{21}}{z_{22}}I_1 + \frac{1}{z_{22}}U_2$$

2 Podstawiamy do równania (1)

$$U_1 = z_{11}I_1 + z_{12}\left(-\frac{z_{21}}{z_{22}}I_1 + \frac{1}{z_{22}}U_2\right) = \frac{\Delta_z}{z_{22}}I_1 + \frac{z_{12}}{z_{22}}U_2$$

3 Wynik z → h

$$[h] = \frac{1}{z_{22}}\begin{bmatrix} \Delta_z & z_{12} \\ -z_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

4 Odwrotnie h → z: ta sama budowa wzoru

$$U_2 = -\frac{h_{21}}{h_{22}}I_1 + \frac{1}{h_{22}}I_2 \;\Rightarrow\; [z] = \frac{1}{h_{22}}\begin{bmatrix} \Delta_h & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

ZADANIE 14 · CZĘŚĆ 2

Pozostałe przeliczenia: z, h ↔ a

Zależności wyznaczników

$$\Delta_a = \frac{z_{12}}{z_{21}}, \qquad \Delta_h = \frac{z_{11}}{z_{22}}, \qquad \Delta_a = -\frac{h_{12}}{h_{21}}$$

Dla czwórnika odwracalnego $z_{12} = z_{21}$, więc $\Delta a = 1$ i $h_{12} = -h_{21}$.

Mianownik wzoru mówi, kiedy postać nie istnieje: [a] wymaga $z_{21} \neq 0$ – stąd brak [a] dla zrównoważonego mostka.

z → a Z (2) wyznaczamy I_1 i podstawiamy do (1)

$$I_1 = \frac{1}{z_{21}}U_2 + \frac{z_{22}}{z_{21}}(-I_2) \;\Rightarrow\; [a] = \frac{1}{z_{21}}\begin{bmatrix} z_{11} & \Delta_z \\ 1 & z_{22} \end{bmatrix}$$

a → z Z drugiego równania [a] wyznaczamy U_2

$$U_2 = \frac{1}{a_{21}}I_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}}I_2 \;\Rightarrow\; [z] = \frac{1}{a_{21}}\begin{bmatrix} a_{11} & \Delta_a \\ 1 & a_{22} \end{bmatrix}$$

h → a Z drugiego równania [h] wyznaczamy I_1

$$I_1 = -\frac{h_{22}}{h_{21}}U_2 - \frac{1}{h_{21}}(-I_2) \;\Rightarrow\; [a] = -\frac{1}{h_{21}}\begin{bmatrix} \Delta_h & h_{11} \\ h_{22} & 1 \end{bmatrix}$$

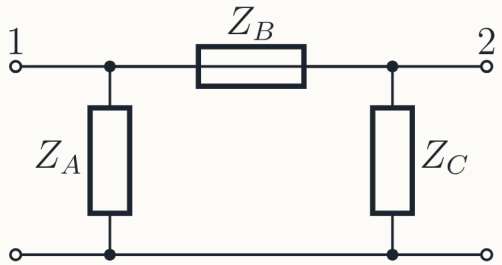
a → h Z drugiego równania [a] wyznaczamy I_2

$$I_2 = -\frac{1}{a_{22}}I_1 + \frac{a_{21}}{a_{22}}U_2 \;\Rightarrow\; [h] = \frac{1}{a_{22}}\begin{bmatrix} a_{12} & \Delta_a \\ -1 & a_{21} \end{bmatrix}$$

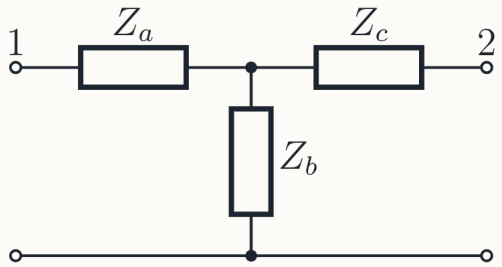
ZADANIE 15 · CZĘŚĆ 1

Trójkąt → gwiazda: porównanie macierzy [z]

Π – trójkąt



T – gwiazda



Σ = ZA + ZB + ZC

1 Macierze [z] obu układów (z 13d i 13e)

$$[z]_\Pi = \frac{1}{\Sigma}\begin{bmatrix} Z_A(Z_B+Z_C) & Z_AZ_C \\ Z_AZ_C & Z_C(Z_A+Z_B) \end{bmatrix}, \qquad [z]_T = \begin{bmatrix} Z_a+Z_b & Z_b \\ Z_b & Z_b+Z_c \end{bmatrix}$$

2 Element z_{12} daje od razu ramię poprzeczne

$$z_{12}: \quad Z_b = \frac{Z_AZ_C}{\Sigma}$$

3 Element z_{11}

$$z_{11}: \quad Z_a = \frac{Z_A(Z_B+Z_C)}{\Sigma} - Z_b = \frac{Z_AZ_B}{\Sigma}$$

4 Element z_{22}

$$z_{22}: \quad Z_c = \frac{Z_C(Z_A+Z_B)}{\Sigma} - Z_b = \frac{Z_BZ_C}{\Sigma}$$

Reguła: ramię gwiazdy przy węźle = iloczyn dwóch boków trójkąta zbiegających się w tym węźle przez sumę boków.

ZADANIE 15 · CZĘŚĆ 2

Gwiazda → trójkąt: porównanie macierzy [y]

Oznaczenie

P = ZaZb + ZaZc + ZbZc

Przykład

Trójkąt 3 × 30 Ω daje gwiazdę 3 × 10 Ω, czyli ZY = ZΔ/3. Z powrotem: P = 3·100 = 300, ZΔ = 300/10 = 30 Ω.

Równe macierze oznaczają, że układów nie da się odróżnić od strony zacisków przy dowolnym obciążeniu.

1 Macierze [y] obu układów

$$[y]_T = \frac{1}{P}\begin{bmatrix} Z_b + Z_c & -Z_b \\ -Z_b & Z_a + Z_b \end{bmatrix}, \qquad [y]_\Pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} & -\frac{1}{Z_B} \\ -\frac{1}{Z_B} & \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C} \end{bmatrix}$$

2 Element y_{12}

$$y_{12}: \quad \frac{1}{Z_B} = \frac{Z_b}{P} \Rightarrow Z_B = \frac{P}{Z_b}$$

3 Elementy y_{11} i y_{22}

$$y_{11}: \frac{1}{Z_A} = \frac{Z_c}{P} \Rightarrow Z_A = \frac{P}{Z_c}, \qquad y_{22}: \frac{1}{Z_C} = \frac{Z_a}{P} \Rightarrow Z_C = \frac{P}{Z_a}$$

Reguła: bok trójkąta = suma iloczynów par ramion gwiazdy przez ramię przeciwległe temu bokowi.

4 Sprawdzenie: złożenie obu przekształceń daje tożsamość

$$P = \frac{Z_A Z_B Z_C}{\Sigma} \Rightarrow \frac{P}{Z_c} = \frac{Z_A Z_B Z_C}{\Sigma} \cdot \frac{\Sigma}{Z_B Z_C} = Z_A$$

Do zapamiętania

1	**Cztery liczby**	Czwórnik liniowy opisują cztery liczby; z, y, h, a to tylko różne zapisy.
2	**Stan jałowy i zwarcia**	Element macierzy = iloraz przy rozwartych lub zwartych wrotach.
3	**Minus przy I_2**	Oba prądy wpływają do czwórnika; obciążenie daje $-I_2 = U_2/Z$.
4	**Kaskada = iloczyn [a]**	Mnożymy macierze łańcuchowe od wejścia do wyjścia, nie wzmocnienia.
5	**Test $\Delta a = 1$**	Każdy czwórnik pasywny jest odwracalny – szybka kontrola rachunków.