

# Podstawy Elektroniki

## Ćwiczenia komputerowe

---

Modulacja, demodulacja, woltomierz homodynowy. Integrator typu  
Boxcar

Autor: Dariusz Tefelski



Fundusze Europejskie  
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita  
Polska

Dofinansowane przez  
Unię Europejską



Politechnika Warszawska



## Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp teoretyczny</b>	<b>1</b>
1.1	Cel i konieczność modulacji . . . . .	1
1.2	Multipleksacja: TDM i FDM . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Modulacja Amplitudy (AM)</b>	<b>1</b>
2.1	Podstawy matematyczne . . . . .	1
2.2	Rodzaje modulacji AM . . . . .	1
2.3	Odtwarzanie nośnej i Demodulacja . . . . .	2
2.4	Charakterystyka porównawcza modulacji amplitudy . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Modulacje Kąta (FM i PM)</b>	<b>3</b>
3.1	Definicje i wzajemne relacje . . . . .	3
3.2	Widmo - Funkcje Bessela . . . . .	3
3.3	Charakterystyka porównawcza modulacji FM i PM . . . . .	4
3.4	Dlaczego modulacje FM/PM są "lepsze" mimo szerokiego pasma? . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Lock-in Amplifier i Boxcar</b>	<b>5</b>
4.1	Woltomierz Homodynowy (Lock-in) . . . . .	5
4.1.1	Dlaczego Lock-In działa tak dobrze? . . . . .	6
4.1.2	Zastosowania Lock-In . . . . .	6
4.2	Integrator Boxcar . . . . .	7
4.2.1	Zasada działania (Gated Integration) . . . . .	7
4.2.2	Zastosowania integratora Boxcar . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Zadania Laboratoryjne</b>	<b>8</b>
5.1	Wymagane oprogramowanie . . . . .	16
<b>6</b>	<b>Autorzy i historia opracowania</b>	<b>17</b>





## 1 Wstęp teoretyczny

### 1.1 Cel i konieczność modulacji

Przesyłanie informacji na odległość drogą radiową wymaga dopasowania sygnału do ośrodka transmisyjnego. Bezpośrednie przesyłanie sygnałów mowy czy muzyki (częstotliwości rzędu 20 Hz – 20 kHz) jest technicznie niemożliwe z powodu:

1. **Wymiarów anteny:** Skuteczna antena musi mieć długość rzędu  $\lambda/4$ . Dla 1 kHz  $\lambda \approx 300$  km. Przy częstotliwości 100 MHz  $\lambda = 3$  m, co pozwala na budowę poręcznych anten (np. w smartfonach).
2. **Współdzielenia pasma:** Modulacja pozwala na przesunięcie widma różnych sygnałów w różne zakresy częstotliwości (kanały), co umożliwia pracę wielu nadajników jednocześnie.

### 1.2 Multipleksacja: TDM i FDM

- **FDM (Frequency Division Multiplexing):** Każdy sygnał modulowany jest na innej nośnej. Widma są odseparowane w dziedzinie częstotliwości. Przykład: tradycyjna radiofonia.
- **TDM (Time Division Multiplexing):** Sygnały zajmują to samo pasmo, ale w różnych szczelinach czasowych. Przykład: GSM, magistrale komputerowe.

## 2 Modulacja Amplitudy (AM)

### 2.1 Podstawy matematyczne

Sygnał AM w dziedzinie czasu:  $s(t) = A_c[1 + k_a m(t)] \cos(2\pi f_c t)$ . Widmo AM dla sygnału  $m(t) = \cos(2\pi f_m t)$  to:

$$S(f) = \frac{A_c}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \frac{A_c k_a}{4}[\delta(f - (f_c - f_m)) + \dots] \quad (1)$$

Widzimy prążek nośnej oraz dwie **wstęgi boczne** oddalone o  $f_m$  od  $f_c$ .

### 2.2 Rodzaje modulacji AM

1. **DSB-LC (Standard AM):** Zawiera nośną. Prosty detektor obwiedni (dioda + RC).
2. **DSB-SC (Suppressed Carrier):** Nośna jest tłumiona.  $s(t) = m(t) \cos(2\pi f_c t)$ . Wymaga **detekcji synchronicznej**.
3. **SSB (Single Sideband):** Przesyłana jest tylko jedna wstęga. Otrzymywana metodą filtracji lub fazową (Transformata Hilberta):  $s_{SSB}(t) = m(t) \cos(2\pi f_c t) \mp \hat{m}(t) \sin(2\pi f_c t)$ .





## 2.3 Odtwarzanie nośnej i Demodulacja

W przypadku DSB-SC i SSB odbiornik musi wygenerować nośną identyczną z nadawcą (faza i częstotliwość). Stosuje się:

- **Pętlę Costasa:** Układ sprzężenia zwrotnego z detektorami I i Q.
- **Podwajacz częstotliwości (Squaring Loop):** Podniesienie sygnału do kwadratu generuje składową  $2f_c$ , którą można podzielić przez 2.

## 2.4 Charakterystyka porównawcza modulacji amplitudy

1. AM Standardowa (DSB-LC: Double Sideband Large Carrier) To klasyczna modulacja stosowana w radiu na falach długich, średnich i krótkich.

Cechy:

- Sygnał zawiera silną składową częstotliwości nośnej oraz dwie wstęgi boczne (górną i dolną).
  - Szerokość pasma:  $2 \times B_m$  (gdzie  $B_m$  to najwyższa częstotliwość sygnału modulującego). Widmo jest szerokie, bo przesyłamy to samo dwukrotnie.
  - Moc i wydajność: Praktyczne ponad 50% (a często nawet 80-90%) całkowitej mocy nadajnika jest "marnowane" na emisję samej nośnej, która nie niesie żadnej informacji, a służy jedynie jako punkt odniesienia. Na przesył informacji pozostaje 25% mocy, a obie wstęgi boczne niosą informację redundantną.
  - Redundantność: Bardzo wysoka. Informacja jest zawarta w obu wstęgach bocznych (które są swoim lustrzanym odbiciem).
  - Zaleta: Niezwykle prosty i tani odbiornik (detektor obwiedni – wystarczy dioda, kondensator i rezystor).
2. DSB-SC (Double Sideband Suppressed Carrier) Modulacja z dwiema wstęgami bocznymi, ale z tłumioną nośną.

Cechy:

- Nośna jest usuwana w procesie modulacji (zwykle w modulatorze zrównoważonym). Sygnał na wyjściu to iloczyn  $m(t) \times \cos(\omega_c t)$ .
- Szerokość pasma:  $2 \times B_m$ . Nadal zajmuje tyle samo co standardowe AM.
- Moc i wydajność: Wysoka. Cała moc nadajnika jest wykorzystywana do przesyłania informacji (wstęg bocznych). Brak strat na bezużyteczną nośną, ale przesyłamy informację redundantnie, więc niepotrzebnie tracimy 50% mocy.
- Redundantność: Wysoka. Choć nośnej nie ma, nadal przesyłamy dwie wstęgi boczne niosące tę samą informację.
- Zaleta: Lepsza wydajność energetyczna niż w AM.





- Wada: Wymaga detekcji synchronicznej (odbiornik musi sam wytworzyć nośną o identycznej fazie i częstotliwości).
3. SSB (Single Sideband) Modulacja jednowstęgowa – szczytowe osiągnięcie analogowej efektywności pasmowej.

Cechy:

- Z widma usuwa się nośną oraz jedną z wstęg bocznych (zostaje tylko USB (górna) lub LSB (dolna)).
- Szerokość pasma:  $1 \times B_m$ . Zajmuje połowę pasma w porównaniu do AM i DSB-SC. Dzięki temu w tym samym zakresie częstotliwości można zmieścić dwa razy więcej stacji.
- Moc i wydajność: Bardzo wysoka. Cała moc jest skupiona w jednej wstędze. Jest to najbardziej efektywny sposób przesyłania głosu na duże odległości.
- Redundantność: Zero. Przesyłamy tylko absolutne minimum niezbędne do odtworzenia informacji. Nie ma powielonych danych ani nośnej.
- Zaleta: Maksymalna oszczędność pasma i mocy. Standard w krótkofalarstwie i łączności profesjonalnej dalekiego zasięgu.
- Wada: Najtrudniejsza w realizacji. Wymaga bardzo precyzyjnych filtrów lub zaawansowanych metod fazowych (transformata Hilberta) oraz bardzo stabilnych generatorów w odbiorniku (błąd o 50 Hz czyni głos nienaturalnym).

## 3 Modulacje Kąta (FM i PM)

### 3.1 Definicje i wzajemne relacje

- **PM (Faza):**  $s_{PM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + k_p m(t))$
- **FM (Częstotliwość):**  $s_{FM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int m(\tau) d\tau)$

**Konwersja:** FM można uzyskać z modulatora PM podając na wejście sygnał scałkowany  $\int m(t) dt$ . PM uzyskujemy z modulatora FM podając pochodną  $\frac{d}{dt} m(t)$ .

### 3.2 Widmo - Funkcje Bessela

Widmo FM nie jest sumą dwóch wstęg, lecz nieskończoną serią prążków:

$$s_{FM}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(2\pi(f_c + n f_m)t) \quad (2)$$

gdzie  $J_n(\beta)$  to funkcje Bessela pierwszego rodzaju, a  $\beta = \Delta f / f_m$  to indeks modulacji.





## 3.3 Charakterystyka porównacza modulacji FM i PM

Modulacje FM (częstotliwości) oraz PM (fazy) należą do wspólnej grupy modulacji kąta. W przeciwieństwie do AM, informacja nie jest zawarta w zmianach amplitudy, lecz w zmianach argumentu (kąta) funkcji cosinus.

### 1. Modulacja Częstotliwości (FM - Frequency Modulation)

Cechy:

- Częstotliwość chwilowa nośnej zmienia się liniowo w takt zmian amplitudy sygnału modulującego.
- Wydajność mocy: Bardzo wysoka. Sygnał FM ma stałą amplitudę (stałą obwiednię). Dzięki temu nadajniki mogą pracować z nieliniowymi wzmacniaczami klasy C, które mają bardzo wysoką sprawność energetyczną. Moc nadajnika nie zależy od głębokości modulacji.
- Szerokość pasma: Szerokie. Teoretycznie widmo FM jest nieskończone. W praktyce stosuje się regułę Carsona:

$$B \approx 2(\Delta f + f_m)$$

gdzie  $\Delta f$  to dewiacja (maksymalne odchylenie częstotliwości), a  $f_m$  to najwyższa częstotliwość modulująca. Pasma FM jest znacznie szersze niż AM (np. radio FM zajmuje 180-200 kHz, podczas gdy AM tylko 9 kHz).

- Redundantność informacji: Bardzo wysoka. Ta sama informacja o sygnale modulującym jest rozproszona w nieskończonej liczbie prążków bocznych (opisanych funkcjami Bessela). Ta "nadmiarowość" jest kluczem do odporności FM na szumy – zakłócenia amplitudy (np. wyładowania atmosferyczne) można po prostu "odciąć" w odbiorniku bez utraty informacji.

### 2. Modulacja Fazy (PM - Phase Modulation)

Cechy:

- Faza chwilowa nośnej zmienia się proporcjonalnie do sygnału modulującego. Jest bardzo blisko spokrewniona z FM (częstotliwość to pochodna fazy).
- Wydajność mocy: Bardzo wysoka. Podobnie jak w FM, amplituda sygnału jest stała, co pozwala na maksymalne wykorzystanie mocy nadajnika.
- Szerokość pasma: Podobna do FM, jednak w PM szerokość pasma zależy nie tylko od amplitudy sygnału modulującego, ale również od jego częstotliwości. Im szybciej zmienia się sygnał  $m(t)$ , tym szersze pasmo zajmuje PM (co jest wadą w porównaniu do FM dla sygnałów analogowych).
- Redundantność informacji: Wysoka, podobnie jak w FM. Informacja jest zakodowana w przesunięciach fazowych prążków bocznych.





### 3.4 Dlaczego modulacje FM/PM są "lepsze" mimo szerokiego pasma?

Kluczem jest wymiana pasma na jakość (SNR). Dzięki temu, że modulacje kąta zajmują szersze pasmo i posiadają dużą redundancję (informacja powielona w wielu prążkach), odbiornik może skuteczniej oddzielić sygnał od szumu. Jest to podstawowa zasada nowoczesnej telekomunikacji: poświęcamy szerokość pasma, aby uzyskać czystą transmisję przy niższej mocy sygnału.

Zastosowanie:

- FM: Radiofonia wysokiej jakości (UKF), łączność profesjonalna.
- PM: Rzadziej w wersji analogowej, ale stanowi fundament niemal wszystkich modulacji cyfrowych (BPSK, QPSK, QAM), na których opiera się Wi-Fi, LTE i 5G.

## 4 Lock-in Amplifier i Boxcar

### 4.1 Woltomierz Homodynowy (Lock-in)

#### Warto wiedzieć



Woltomierz homodynowy, częściej nazywany wzmacniaczem Lock-In (ang. Lock-In Amplifier), to niezwykle czuły przyrząd pomiarowy zdolny do wyodrębnienia sygnału o znanej częstotliwości z szumu, który jest od niego tysiące, a nawet miliony razy silniejszy.

Nazwa "homodynowy" bierze się z greckiego homos (taki sam) i dynamis (siła/moc), co odnosi się do faktu, że sygnał mierzony i sygnał referencyjny mają tę samą częstotliwość.

Zasada działania w 4 krokach:

#### 1. Modulacja (Przygotowanie)

Pomiar homodynowy wymaga, aby sygnał mierzony był okresowy. Jeśli badamy zjawisko stałe (np. natężenie światła), musimy je „poszatkować” (zmodulować) za pomocą urządzenia zwanego chopperem (wirująca tarcza z dziurami) lub modulując prąd zasilający źródło. Dzięki temu informacja o wielkości fizycznej zostaje przeniesiona na konkretną częstotliwość  $f_c$  (częstotliwość nośną).

#### 2. Mieszanie (PSD - Phase Sensitive Detector)

Sygnał z wejścia (sygnał + ogromny szum) trafia do mieszacza analogowego (lub cyfrowego mnożnika). Tam jest mnożony przez czysty sygnał referencyjny  $V_{ref} = \sin(2\pi f_c t + \theta)$  pochodzący z tego samego generatora, który steruje modulacją.

Zgodnie z matematyką mnożenia sinusów:

$$V_{in} \cdot V_{ref} = [A \sin(2\pi f_c t + \phi)] \cdot [B \sin(2\pi f_c t + \theta)] = \frac{AB}{2} \cos(\phi - \theta) - \frac{AB}{2} \cos(4\pi f_c t + \dots)$$



Fundusze Europejskie  
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita  
Polska

Dofinansowane przez  
Unię Europejską



Politechnika Warszawska

Plac Politechniki 1  
00-661 Warszawa

www.pw.edu.pl



### 3. Filtracja (LPF - Low Pass Filter)

Wynik mnożenia zawiera:

- Składową DC (stałą): proporcjonalną do amplitudy sygnału i zależną od różnicy faz.
- Składową  $2f$ : o podwojonej częstotliwości.
- Szum: który po pomnożeniu przez sinus nadal jest sygnałem zmiennym o różnych częstotliwościach.

Filtr dolnoprzepustowy o bardzo niskiej częstotliwości odcięcia (np. 1 Hz) usuwa składową  $2f$  oraz niemal cały szum. Zostaje tylko czysty sygnał stały (DC).

4. Detekcja fazy Ponieważ wynik zależy od  $\cos(\Delta\phi)$ , nowoczesne wzmacniacze Lock-In posiadają dwa tory pomiarowe (I – in-phase i Q – quadrature), gdzie referencje są przesunięte względem siebie o  $90^\circ$ . Pozwala to wyliczyć amplitudę sygnału niezależnie od jego fazy:

$$A = \sqrt{I^2 + Q^2}$$

#### 4.1.1 Dlaczego Lock-In działa tak dobrze?

Sekretem jest pasmo przenoszenia. Zwykły woltomierz AC mierzy szum w całym swoim paśmie (np. od 10 Hz do 100 kHz). Lock-In zachowuje się jak filtr pasmowy o ekstremalnie wąskim pasmie (np. 0.01 Hz) nastrojony idealnie na częstotliwość sygnału. To tak, jakbyś próbował usłyszeć szept jednej osoby w tłumie 10 000 ludzi – Lock-In „słyszy” tylko wtedy, gdy ta osoba mówi w dokładnie ustalonym rytmie, a całą resztę głosów ignoruje.

#### 4.1.2 Zastosowania Lock-In

- Pomiar sygnałów optycznych (fotodiody).
- Spektroskopia (wykrywanie słabych linii absorpcyjnych).
- Badanie nadprzewodników (pomiar bardzo małych oporności).
- Mikroskopia sił atomowych (AFM).

#### Definicja



Woltomierz fazoczuły = woltomierz homodynowy = wzmacniacz Lock-In (Lock-In Amplifier) to układ mnożący sygnał wejściowy (o określonej częstotliwości ale mocno zaszumiony) przez referencyjny sygnał o tej samej częstotliwości i filtrujący wynik przez filtr dolnoprzepustowy (LPF).

**Tor sygnałowy:**  $V_{sig} \sin(\omega t) \times V_{ref} \sin(\omega t + \phi) \xrightarrow{LPF} \frac{1}{2} V_{sig} V_{ref} \cos(\phi)$ .

Pozwala na pomiar sygnałów rzędu nanowoltów ukrytych w miliwoltach szumu.





## 4.2 Integrator Boxcar

Integrator Boxcar (często nazywany Gated Integrator lub Signal Averager) to przyrząd pomiarowy służący do odzyskiwania sygnałów z szumu, dedykowany specjalnie dla sygnałów impulsowych o małym współczynniku wypełnienia.

Podczas gdy wzmacniacz Lock-In jest idealny dla sygnałów ciągłych (sinusoidalnych), Boxcar najlepiej sprawdza się tam, gdzie sygnał pojawia się na bardzo krótko, po czym następuje długa przerwa (np. błyski lasera pulsacyjnego).

### 4.2.1 Zasada działania (Gated Integration)

Działanie Boxcara opiera się na dwóch kluczowych koncepcjach: bramkowaniu oraz uśrednianiu.

1. **Bramkowanie (Gating)** Zamiast mierzyć sygnał przez cały czas (i zbierać szum przez cały czas), Boxcar otwiera "bramkę" pomiarową (okno czasowe) tylko w momencie, gdy spodziewamy się nadejścia impulsu.
  - Wzmacniacz wejściowy jest "odcięty" przez większość czasu.
  - W momencie wyzwania (trigger), po ustalonym opóźnieniu, bramka otwiera się na czas  $T_{gate}$ .
  - Dzięki temu szum zbierany jest tylko przez ułamek mikrosekundy, a nie przez cały okres między impulsami.
2. **Całkowanie (Integration)** Sygnał, który "wpadł" przez otwartą bramkę, trafia na układ całkujący (zwykle kondensator). Napięcie na wyjściu jest proporcjonalne do pola powierzchni pod impulsem wewnątrz okna bramki:

$$V_{out} \propto \int_{t_{delay}}^{t_{delay} + T_{gate}} V_{in}(t) dt$$

3. **Uśrednianie (Averaging / Exponential Averaging)** Jeden impuls zazwyczaj jest zbyt zaszumiony, by dać precyzyjny wynik. Boxcar uśrednia sygnały z wielu kolejnych impulsów ( $N$ ). Zgodnie z prawem statystyki, przy uśrednianiu  $N$  impulsów:
  - Sygnał użyteczny (powtarzalny) sumuje się liniowo.
  - Szum (losowy) sumuje się jako pierwiastek kwadratowy.
  - Stosunek sygnału do szumu (SNR) poprawia się o czynnik  $\sqrt{N}$ .

Tryby pracy:

1. **Fixed Gate:** Bramka jest ustawiona na stałe w czasie trwania impulsu. Mierzmy amplitudę powtarzającego się sygnału.
2. **Scanning Gate (Gate Scan):** Bramka powoli przesuwa się w czasie względem momentu wyzwania. Pozwala to na "odrysowanie" dokładnego kształtu impulsu (np. badanie czasu zaniku fluorescencji), punkt po punkcie.



Fundusze Europejskie  
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita  
Polska

Dofinansowane przez  
Unię Europejską



Politechnika Warszawska

Plac Politechniki 1  
00-661 Warszawa

www.pw.edu.pl



Porównanie: Lock-In vs Boxcar

Cecha	Wzmacniacz Lock-In	Integrator Boxcar
Typ sygnału	Ciągły (sinusoidalny)	Impulsowy (krótkie piki)
Główna idea	Mnożenie przez referencję	Bramkowanie czasowe
Współczynnik wypełnienia	Duży (50%)	Bardzo mały (np. 0,01%)
Dziedzina	Częstotliwość ( $f$ )	Czas ( $t$ )

#### 4.2.2 Zastosowania integratora Boxcar

- LIDAR: Pomiar powrotu echa laserowego.
- Spektroskopia laserowa: Pomiar sygnałów z laserów impulsowych (np. nanosekundowych).
- Badanie kinetyki reakcji: Obserwacja szybkich procesów chemicznych wywołanych impulsem światła.
- Pomiar czasu przelotu (Time-of-Flight): Np. w spektrometrii masowej.

#### Warto wiedzieć



Boxcar to "inteligentna średnia", która patrzy na świat tylko wtedy, gdy dzieje się coś ciekawego, ignorując szum panujący w okresach ciszy.

#### Definicja



Integrator Boxcar to bramkowany układ uśredniający. Bramka (Gate) otwiera się w synchronizacji z impulsem. Wzór:  $V_{out} = \frac{1}{T_{gate}} \int_{t_0}^{t_0+T_{gate}} V(t) dt$ .

## 5 Zadania Laboratoryjne

**Zadanie 1.** Zbadaj modulację amplitudy, modulację amplitudy z usuniętą częstotliwością nośną oraz modulację SSB - pozostawienie jedynie wstęgi bocznej.

Różne modulacje AM przedstawia listing 5.1.

#### Listing 5.1: Skrypt pokazujący różne modulacje AM

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import signal
from scipy.fft import fft, fftfreq

def analyze_spectrum(s, fs):
    n = len(s)
    yf = fft(s)
    xf = fftfreq(n, 1 / fs)[: n // 2]
```



Fundusze Europejskie  
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita  
Polska

Dofinansowane przez  
Unię Europejską



Politechnika Warszawska

Plac Politechniki 1  
00-661 Warszawa

www.pw.edu.pl



Listing 5.1: Skrypt pokazujący różne modulacje AM (c.d.)

```
return xf, 2.0 / n * np.abs(yf[: n // 2])

fs = 100000 # Wysoka czestotliwosc probkowania dla czystych widm
t = np.arange(0, 0.1, 1 / fs)
fc = 2000
fm = 100

m = np.cos(2 * np.pi * fm * t)
c = np.cos(2 * np.pi * fc * t)

# --- ZADANIE 1: AM ---
ka = 0.8
am_std = (1 + ka * m) * c
am_sc = m * c
# SSB (USB) uzywajac transformaty Hilberta
m_hilbert = np.imag(signal.hilbert(m))
ssb_usb = m * np.cos(2 * np.pi * fc * t) - m_hilbert * np.sin(
    2 * np.pi * fc * t
)

plt.figure(figsize=(15, 10))
plt.subplot(3, 2, 1)
plt.plot(t[:2000], am_std[:2000])
plt.title("AM Standard (Czas)")
xf, yf = analyze_spectrum(am_std, fs)
plt.subplot(3, 2, 2)
plt.semilogy(xf, yf)
plt.xlim(fc - 500, fc + 500)
plt.title("AM Standard (Widmo)")

plt.subplot(3, 2, 3)
plt.plot(t[:2000], am_sc[:2000])
plt.title("AM-SC (Czas)")
xf, yf = analyze_spectrum(am_sc, fs)
plt.subplot(3, 2, 4)
plt.semilogy(xf, yf)
plt.xlim(fc - 500, fc + 500)
plt.title("AM-SC (Widmo)")

plt.subplot(3, 2, 5)
plt.plot(t[:2000], ssb_usb[:2000])
plt.title("SSB USB (Czas)")
xf, yf = analyze_spectrum(ssb_usb, fs)
plt.subplot(3, 2, 6)
plt.semilogy(xf, yf)
plt.xlim(fc - 500, fc + 500)
```





Listing 5.1: Skrypt pokazujący różne modulacje AM (c.d.)

```
plt.title("SSB USB (Widmo)")
plt.tight_layout()
plt.show()

# Transformata Hilberta

plt.figure(figsize=(15, 10))
plt.subplot(2, 2, 1)
plt.plot(t[:2000], np.real(signal.hilbert(m))[:2000])
plt.title("Transformata Hilberta s. modulującego cz. rzeczywista")
plt.subplot(2, 2, 2)
plt.plot(t[:2000], np.imag(signal.hilbert(m))[:2000])
plt.title("Transformata Hilberta s. modulującego cz. urojona")
plt.tight_layout()
plt.show()
```

**Zadanie 2.** Zbadaj modulację częstotliwości i modulację fazy.

Modulację FM i PM przedstawia listing 5.2.

Listing 5.2: Skrypt pokazujący modulacje FM i PM

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import signal
from scipy.fft import fft, fftfreq

def analyze_spectrum(s, fs):
    n = len(s)
    yf = fft(s)
    xf = fftfreq(n, 1 / fs)[: n // 2]
    return xf, 2.0 / n * np.abs(yf[: n // 2])

fs = 100000 # Wysoka czestotliwosc probkowania dla czystych widm
t = np.arange(0, 0.1, 1 / fs)
fc = 2000 # Czestotliwosc nośna (carrier frequency)
fm = 100 # Czestotliwosc sygnału modulującego

m = np.cos(2 * np.pi * fm * t) # Sygnał modulujący
c = np.cos(2 * np.pi * fc * t) # Sygnał nośny

# --- ZADANIE 2: FM i PM ---
beta = 2.0
kp = beta # Dla m = cos(2pi*fm*t), PM(m) ma indeks beta
pm_sig = np.cos(2 * np.pi * fc * t + kp * m) # Modulacja fazy
```





Listing 5.2: Skrypt pokazujący modulacje FM i PM (c.d.)

```

# FM z PM:  $FM(m) = PM(int(m))$  # Sygnał zmodulowany częstotliwościowo
↳ otrzymany jako całka z sygnału zmodulowanego fazowo
m_int = np.cumsum(m) / fs
m_int = m_int / np.max(np.abs(m_int)) # Normalizacja dla beta
fm_sig = np.cos(2 * np.pi * fc * t + beta * m_int)

plt.figure(figsize=(15, 6))
plt.subplot(2, 2, 1)
plt.plot(t[:1000], fm_sig[:1000])
plt.title("FM (Czas)")
xf, yf = analyze_spectrum(fm_sig, fs)
plt.subplot(2, 2, 2)
plt.semilogy(xf, yf)
plt.xlim(fc - 2000, fc + 2000)
plt.title("FM (Widmo - Prazki Bessela)")

plt.subplot(2, 2, 3)
plt.plot(t[:1000], pm_sig[:1000])
plt.title("PM (Czas)")
xf, yf = analyze_spectrum(pm_sig, fs)
plt.subplot(2, 2, 4)
plt.semilogy(xf, yf)
plt.xlim(fc - 2000, fc + 2000)
plt.title("PM (Widmo)")

plt.tight_layout()
plt.show()

```

**Zadanie 3.** Zademonstruj działanie woltomierza homodynowego, przeprowadzając procedurę wytworzenia - modulacji sygnału, zaszumienia sygnału, przemnożenia przez sygnał referencyjny, a następnie odfiltrowania filtrem dolnoprzepustowym np. typu Butterworth 4-tego rzędu i częstotliwości odcięcia 2 Hz.

Demonstrację układu Lock-In przedstawia listing 5.3.

Listing 5.3: Skrypt demonstrujący działanie układu Lock-In.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import signal

# 1. Parametry symulacji
fs = 10000 # Czestotliwosc probkowania (10 kHz)
t = np.arange(0, 1.0, 1 / fs)
fc = 100 # Czestotliwosc nosna (100 Hz)

```





Listing 5.3: Skrypt demonstrujący działanie układu Lock-In. (c.d.)

```
# 2. Sygnał badany (wolnozmienny lub stały)
# Chcemy zmierzyć wartość 0.5
true_amplitude = 0.5
source_signal = true_amplitude * np.ones_like(t)

# 3. Modulacja (np. przez chopper lub modulację źródła)
modulated_signal = source_signal * np.sin(2 * np.pi * fc * t)

# 4. Dodanie silnego szumu (SNR < 1)
noise_amplitude = 2.0
noise = np.random.normal(0, noise_amplitude, len(t))
noisy_signal = modulated_signal + noise

# 5. Mieszacz (PSD - Phase Sensitive Detector)
# Mnożymy przez sygnał referencyjny o tej samej częstotliwości i fazie
reference = np.sin(2 * np.pi * fc * t)
mixed_signal = noisy_signal * reference

# 6. Filtracja dolnoprzepustowa (LPF)
# Projektujemy filtr Butterwortha
cutoff_hz = 2.0 # Bardzo wąskie pasmo, aby wyciąć 2*fc i szum
b, a = signal.butter(4, cutoff_hz / (0.5 * fs), btype="low")

# Filtrowanie (filtfilt zapobiega przesunięciu fazowemu)
recovered_signal_raw = signal.filtfilt(b, a, mixed_signal)

# 7. Kompensacja wzmocnienia
# Teoretycznie: sin(x)*sin(x) = 0.5*(1 - cos(2x))
# Po filtrze dolnoprzepustowym zostaje tylko 0.5 * Amplituda.
# Musimy więc pomnożyć wynik przez 2, aby odzyskać oryginalną wartość.
recovered_signal = recovered_signal_raw * 2

# 8. Wykresy
plt.figure(figsize=(12, 12))

plt.subplot(5, 1, 1)
plt.plot(t, source_signal, "g", label="Oryginalna wartość (DC)")
plt.ylim(0, 1)
plt.title("1. Sygnał badany (Wartość do zmierzenia)")
plt.legend()

plt.subplot(5, 1, 2)
plt.plot(t[:500], modulated_signal[:500])
plt.title("2. Sygnał po modulacji (Carrier)")

plt.subplot(5, 1, 3)
plt.plot(t[:500], noisy_signal[:500], alpha=0.7)
```





Listing 5.3: Skrypt demonstrujący działanie układu Lock-In. (c.d.)

```
plt.title("3. Sygnał zaszumiony (wejście Lock-In)")

plt.subplot(5, 1, 4)
plt.plot(t[:500], mixed_signal[:500])
plt.title("4. Sygnał po zmieszaniu (PSD output)") # Phase Sensitive
↳ Detector

plt.subplot(5, 1, 5)
plt.plot(t, recovered_signal, "r", linewidth=2, label="Odzyskana wartosc")
plt.axhline(y=true_amplitude, color="k", linestyle="--", label="Target")
plt.title("5. Wynik po filtrze LPF (Odzyskany sygnał)")
plt.xlabel("Czas [s]")
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()

# Sprawdzenie wartosci końcowej
final_val = np.mean(recovered_signal[int(0.8 * fs) :]) # Srednia z
↳ końcówki
print(f"Oczekiwana wartosc: {true_amplitude}")
print(f"Otrzymana wartosc: {final_val:.4f}")
print(f"Bład: {abs(true_amplitude - final_val):.4f}")
```

Zadanie 4. Zademonstruj działanie integratora Boxcar.

Listing 5.4: Skrypt demonstrujący działanie integratora boxcar

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# 1. Konfiguracja - zwiększamy czestotliwosc i czas dla lepszego SNR
fs = 50000 # 50 kHz - wyzsza rozdzielczosc czasowa
duration = 10.0 # 10 sekund - zbierzemy wiecej impulsów do usrednienia
t = np.arange(0, duration, 1 / fs)

f_rep = 100 # 100 Hz - czestotliwosc powtarzania
pulse_width = 0.002 # 2 ms - szerokosc impulsu
pulse_amplitude = 1.0

# 2. Precyzyjne generowanie impulsu (metoda modulo zapobiega bledom
↳ akumulacji)
period = 1.0 / f_rep
source_signal = ((t % period) < pulse_width).astype(float)

# 3. Szum o duzej amplitudzie (SNR jest bardzo niskie)
```





Listing 5.4: Skrypt demonstrujący działanie integratora boxcar (c.d.)

```
noise_std = 3.0 # Szum 3x większy od amplitudy impulsu
noisy_signal = source_signal + np.random.normal(0, noise_std, len(t))

# 4. Procedura Boxcar Averager (Usrednianie synchroniczne)
# Obliczamy ile próbek przypada na jeden okres
samples_per_period = int(fs / f_rep)
# Obliczamy ile pełnych okresów mamy w nagraniu
num_periods = int(len(t) / samples_per_period)

# Przycinamy sygnał do pełnej liczby okresów i zmieniamy kształt macierzy
# Każdy wiersz to jeden "strzał" (shot) impulsu
reshaped_data = noisy_signal[: num_periods * samples_per_period].reshape(
    num_periods, samples_per_period
)

# Usrednianie (Averaging) - szum redukuje się o czynnik sqrt(num_periods)
recovered_pulse = np.mean(reshaped_data, axis=0)

# Oś czasu dla jednego okresu (bramka czasowa)
t_gate = np.arange(samples_per_period) / fs

# 5. Prezentacja wyników
plt.figure(figsize=(14, 12))

# Fragment surowego sygnału
plt.subplot(3, 1, 1)
plt.plot(
    t[:2500], noisy_signal[:2500], color="gray", alpha=0.5,
    ↪ label="Zaszumiony"
)
plt.plot(t[:2500], source_signal[:2500], "g", linewidth=2,
    ↪ label="Idealny")
plt.title(f"1. Fragment wejściowy (SNR << 1, N_impulsów = {num_periods})")
plt.legend()
plt.grid(True)

# Pełny widok usrednionego okresu
plt.subplot(3, 1, 2)
plt.plot(t_gate * 1000, recovered_pulse, "r", label="Odzyskany (Boxcar)")
plt.plot(
    t_gate * 1000,
    source_signal[:samples_per_period],
    "k--",
    alpha=0.5,
    label="Idealny",
)
plt.title(
```





Listing 5.4: Skrypt demonstrujący działanie integratora boxcar (c.d.)

```
f"2. Wynik po usrednieniu {num_periods} okresów (Widok pelnego
  ↳ okresu)"
)
plt.xlabel("Czas [ms]")
plt.ylabel("Amplituda")
plt.legend()
plt.grid(True)

# Zblizenie na sam impuls (weryfikacja szerokosci)
plt.subplot(3, 1, 3)
plt.plot(t_gate * 1000, recovered_pulse, "r.-", label="Boxcar (punkty)")
plt.axvspan(
    0,
    pulse_width * 1000,
    color="green",
    alpha=0.2,
    label="Oczekiwana szerokosc",
)
plt.xlim(-0.5, pulse_width * 1000 * 3) # Zblizenie na poczatek okresu
plt.title(f"3. Zblizenie na impuls (Oczekiwane {pulse_width * 1000} ms)")
plt.xlabel("Czas [ms]")
plt.legend()
plt.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.show()

# Weryfikacja statystyczna
measured_width_idx = np.where(recovered_pulse > 0.5 * pulse_amplitude)[0]
if len(measured_width_idx) > 0:
    measured_width = (measured_width_idx[-1] - measured_width_idx[0]) / fs
    print(f"Oczekiwana szerokosc: {pulse_width * 1000:.3f} ms")
    print(f"Zmierzona szerokosc (FWHM): {measured_width * 1000:.3f} ms")

print(f"Liczba usrednionych okresów: {num_periods}")
print(f"Poprawa SNR (teoretyczna): {np.sqrt(num_periods):.2f}x")
```

**Zadanie 5.** Uruchom w Multisim przykład modulacji i demodulacji AM (File → Open samples ... → Analog → AmplitudeModulator) i prześledź tor sygnałowy podłączając wirtualny oscyloskop od początku od lewej strony do prawej i wykonując kolejne symulacje interaktywne. Znajdź miejsce, gdzie sygnał nośny jest zmodulowany (pierwszy mieszacz inaczej mikser, czyli układ mnożący, ozn. A3), a następnie gdzie następuje demodulacja - drugi mieszacz, ozn. A4, a następnie wskaż filtr dolnoprzepustowy, który odtwarza obwiednię sygnału - czyli sygnał modulujący (który niesie informację).





## Informacje dodatkowe



Więcej informacji dostępne jest na stronie przedmiotu EwEF, w zakładce dotyczącej ćwiczeń: [https://labe.engined.eu/index.php/%C4%86wiczenia\\_EwEF](https://labe.engined.eu/index.php/%C4%86wiczenia_EwEF). W szczególności ta tematyka zawarta jest w materiałach z wykładu 6: [https://labe.engined.eu/data/\\_uploaded/media/EwEF/EwEF\\_w6.pdf](https://labe.engined.eu/data/_uploaded/media/EwEF/EwEF_w6.pdf). Wykład 6 w postaci wideo zawiera sporo dodatkowych informacji. [https://labe.engined.eu/data/\\_uploaded/media/EwEF/EwEF\\_w6.mp4](https://labe.engined.eu/data/_uploaded/media/EwEF/EwEF_w6.mp4).

## 5.1 Wymagane oprogramowanie

Do wykonania ćwiczenia wymagany jest NI Multisim, Jupyter-lab i Python 3 z zainstalowanymi modułami:

- SymPy — do obliczeń symbolicznych i transformacji,
- Matplotlib — do wizualizacji wyników,
- Numpy — do podstawowych struktur danych,
- Scipy — do obliczeń na sygnałach



Fundusze Europejskie  
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita  
Polska

Dofinansowane przez  
Unię Europejską



Politechnika Warszawska

Plac Politechniki 1  
00-661 Warszawa

[www.pw.edu.pl](http://www.pw.edu.pl)

## 6 Autorzy i historia opracowania

- dr inż. Dariusz Tefelski - wersja z 2026r.



Fundusze Europejskie  
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita  
Polska

Dofinansowane przez  
Unię Europejską



Politechnika Warszawska

Plac Politechniki 1  
00-661 Warszawa  
[www.pw.edu.pl](http://www.pw.edu.pl)